



שדרוג המודלים הגוזרים תחזית התפלגות בשער החליפין

דניאל נתן*

סדרת מאמרים לדיוון 2010.01
ינואר 2010

* בנק ישראל <http://www.boi.org.il>

חטיבת המחקר, דניאל נתן – daniel.nathan@boi.org.il, טלפון – 02-6552551
ברצוני להודות לעקיבא אופנברג, רועי שטיין, ינון גמרסני, אליעור ברונשטיין, פולינה זובמן, לחבר
סמיינר מחלקה המחקר של בנק ישראל וכן למתרדיין, בנצי שרייבר על העروתו.

הדעות המובאות במאמר זה אינה משקפות בהכרח את עמדת בנק ישראל

תקציר

בבנק ישראל משתמשים בשני סוגי מודלים (פרמטרי וא-פרמטרי) לבניית פונקציית התפלגות לשער העתידי של השקל/долר. בניית ההתפלגות מתבססת על פיתוחים תיאורתיים המוכרים בספרות, תוך התאמת לשוק האופציות המתוחזק בבורסה. על מנת לכידל את המודלים הנ"ל, משתמשים בנק ישראל במחيري אופציות הנוגדות מספר הפקודות במהלך היום.

מטרת נייר זה הינה להציג מתודולוגיה לסינון תוצאות חריגות הנובעות מהدلילות הייחסית במסחר של חלק ניכר מהאופציות בשערי המימוש השונים על ידי שימוש בסינון המבוסס על כללי ארכיטראז' המקובלים בספרות. סינון זה משפר את יציבות שני המודלים לעומת הסינונים הנוכחיים בעת בנק ישראל.

An upgrade of the models used to forecast the distribution of the exchange rate

Daniel Nathan*

Abstract

The Bank of Israel uses two models, one parametric and one non-parametric, to construct a distribution function for the future shekel/dollar exchange rate. The construction of the distribution is based on theoretical developments as described in the literature, adjusted to the market for forex options traded on the Israeli stock exchange. To calibrate the models, the Bank of Israel uses option prices sampled from the order book during the day.

The purpose of this study is to propose a method for filtering out abnormal observations that arise due to the relatively low level of trade in a considerable share of options at the various strike prices using a filter based on the arbitrage rules found in the literature. The method improved the stability of both models in comparison to the filtering methods currently used at the Bank of Israel.

* My thanks to Akiva Offenbacher, Roy Stein, Inon Gamrasni, Eliezer Borenstein, Polina Dovman, the participants in the seminar of the Bank of Israel Research Department and to Dr. Ben Z. Schreiber for his helpful comments.

1. מבוא ומוטיבציה

בנקים מרכזים רבים¹, כולל בנק ישראל (גלאי ושרייבר 2003, הכת ושתיין 2004, הכת ופומפושקו 2005), משתמשים בפונקציית הצפיפות הניטרלית לסקון (Risk Neutral Density Function) על מנת להלץ את ציפיות המשקיעים לגבי שערים עתידיים בשוקי המניות והמט"ה. על מנת להלץ את פונקציית הצפיפות, יש צורך בדגם של חarakט'ר רוחבי של מחירי אופציות הנוסחרות באותו הזמן על אותו נכס בסיס. מחרים אילו השופים לטעויות הנובעות בין השאר לכך שהמסחר אינו חסר חיכוכים (friction). טעויות אלה (Bliss and Panigirtzoglou 2002) כוללות:

- א) טעויות בנתונים – טעויות בחלוקת הנתונים או בדיווח המחרים.
- ב) חסר סינכרוניות – כתוצאה מהצורך להשתמש בחarakט'ר רוחבי של מחירי אופציות גדול כל שאפשר.
- ג) פרמיית נזילות.

המאמר של Bliss and Panigirtzoglou (2002) ערך השוואה בין השיטות השונות לחילוץ פונקציית הצפיפות על ידי בוחנת רגישות השיטות לטעויות בדגם בעזרת בוחנת המומנטים המחולצים מההתפלגות. מהמאמר עולה כי:

- 1) שתי השיטות רגישות לטעויות בדגם, כאשר ניפוי תცיפות חריגות תורם לייציבות שתי השיטות.
- 2) השיטה הא-פרמטרית הינה הפחות רגישה מבין השתיים.

כיוון שבבנק ישראל משתמשים בשתי השיטות הנ"ל, מטרת הניר אינה לעירך השוואה בין השיטות אלא לשיפור ייציבות שתי השיטות. בנייר אציג מתודולוגיה אשר עקייבית עם התיאוריה המקצועית הקיימת בספרות בתחום על מנת לווזה טעות בדגם ולנפotaו אותה, ובתווך כך להגדיל את ייציבות הפרמטרים הנאמדים בשיטות השונות. בנוסף, על מנת לפטור את בעיית חסר הסינכרוניות, השתמש בספר הפקדות ולא בספר העסקאות. יחד עם זאת, צריך לציין כי לא היה לנו דרך לווזה את מקור הטעות (טעות הנובעת מפרמיית נזילות או מטעות בחלוקת).

מבנה הניר הוא כדלקמן: בחלק 2 מוצגת רקע תיאורטי קצר לתמוך נכסים פיננסיים בכלל ואופציות בפרט. בחלק 3 מוצגת סקירת ספרות בשיטות הקיימות לחילוץ פונקציית הצפיפות בכלל, ובבנק ישראל בפרט והמגבילות האמפיריות הכרוכות בחילוץ. בחלק 4 מוצגים השינויים המוצעים לשיפור הייציבות במודלים הקיימים. בחלק 5 מוצגות השוואות שונות בין המודלים הקיימים בבנק ישראל והמודל עם הסיכון המוצע ובחלק 6 ישנו סיכום של הניר.

2. רקע תיאורטי קצר

2.1 Tamchur Neksimim Finansim

נניח כי אנו נמצאים בכלכלה עם N מכשירים פיננסיים שונים (מניות, אגרות חוב וכדומה). בנוסף, נניח כי בכלכלת זו ישנו רק שני נקודות בזמן $t = 0$ ו- $t = 1$. מחיר המכשיר i בזמן t הוא S_i^t . בזמן $t = 0$,

¹ להלן מספר דוגמאות: בבנק המרכזי של האנגלי – Bahra (1997). בבנק המרכזי של ספרד – Manzano and Sanches (1998). בבנק המרכזי של קנדה – Macmanus (1999). בבנק המרכזי של צרפת – Coutant (1999) ובבנק המרכזי של יפן – Nakamura and Shiratsuka (1999).

S הוא משתנה אקראי אשר תלוי במרחב המודגמ, Ω . לכן, אם הכללה מוגעה למצב $\omega \in \Omega$, הערך

$$S_1^i(\omega) \text{ יהיה } t=1 \text{ בזמן}$$

תיק (Portfolio) הוא וקטור שורה בעל N מימדים $h = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ כך ש h_i היא כמות היחידות

שאנו קונים מ S_0^i ומהזיקים עד זמן $t=1$. לכן, אנחנו יכולים להגיד את ערך התיק שלנו בזמן t כ:

$$V_t^h = \sum_{i=1}^N h_i S_t^i, \quad t=0,1 \quad (1)$$

פורטפוליו h נקרא פורטפוליו בעל ארכיטראז' אם $V_1^h \geq 0$ ו $V_0^h \leq 0$ כאשר אחד מהאי-שוויונות הוא חזק. במקרה פשוט, בחיק המאפשר ארכיטראז', איןנו משלמים כסף מראש ובסוף התקופה אנחנו מרוויחים.

אם אין אפשרות לבנות תיק מסווג זה, אפשר להראות (Harrison and Kreps 1979) שבמרחב מודגמ

בדייד $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ קיים וקטור של ערכים חיוביים p_1, p_2, \dots, p_m כך ש:

$$\sum_{j=1}^m p_j = 1 \quad (2)$$

$$S_0^i = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^m p_j S_1^i(\omega_j) \quad (3)$$

הrukע המתיאורטי שתואר לעיל מתאר כלכלה עם שני זמנים ומצבי עולם בדידים. במקרה, הזמן הינו רציף ויישם אינסויי מצבים עולם. במצב זה, אפשר להראות (Harrison and Pilska 1981) כי כאשר אין אפשרות לבנות תיק ארכיטראז', התשואה על הנכסים הפיננסיים שווה לדריבית הסיכון:

$$E\left(\frac{S_T}{S_t} | S_t\right) = \int q(S_T) \frac{S_T}{S_t} dS_T = e^{r(T-t)} \quad (4)$$

בדומה לווקטור הערכים במצב הבדיקה, במצב הרציף, קיימת פונקציה צפיפות, $q(S_T)$ אשר קרובה להתפלגות הניטרלית לסיכון (RND), המאפיינת את ההתפתחות העתידית של כל נכס.

2.2 תמהור אופציות

כאשר מדובר על אופציה כלשהי (\cdot) הנקתבת על נכס בסיס S_T , משוואת התמהור (4) הופכת להיות:

$$E\left(\frac{g(S_T)}{g(S_t)} | S_t\right) = \frac{1}{g(S_t)} E(g(S_T) | S_t) = e^{r(T-t)} \quad (5)$$

מכאן נובע כי:

$$g(S_t) = e^{-r(T-t)} \int g(S_T) q(S_T) dS_T \quad (6)$$

כלומר, ההתפלגות המאפיינת נכס בסיס כלשהו גלווה בכל אופציה אשר נכתבת על אותו נכס בסיס. בנוסף, ניתן להראות (Breeden and Litzenberger 1978) כי עבור אופציות מכר (ניתן להראות את אותה תוצאה עם אופציות רכש), מתקיים המשוואות הבאות:

$$\frac{\partial P(S_t, K)}{\partial K} = e^{-rt} \left[\int_0^K q(S_T) dS_T \right] = P\{S_T \leq K\} e^{-rt} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 P(S_T, K)}{\partial K^2} = q(K) \quad (8)$$

כלומר, בנגזרת הראשונה של אופציית מכרז לפני שער המימוש גלומה פונקציית הצפיפות המצטברת ובנגזרת השניה פונקציית הצפיפות עצמה.

2.3 הקשר בין פונקציית הצפיפות לאי קיומם ארכיטראז' בשוק האופציות
בסעיף 2.1, נאמר כי קיומם פונקציית הצפיפות תלוי באין קיומם ארכיטראז'. על מנת לראות דוגמא לכך בשוק האופציות נבחן אסטרטגייה אחת בשוק האופציות:

מروוח שוקי יורץ – נניח כי נסחרים בשוק נכס בסיס, S_t , ואופציות מכרז על אותו נכס בסיס בשער מס' K_{i+1} כאשר $K_i < K_{i+1}$. אסטרטגיית מרווח שוק יורץ קינה של אופציית מכרז במחיר מימוש K_i וממכירת אופציית מכרז נוספת במחיר מימוש K_{i+1} . כיוון שהרווח המקסימלי ביום הפקיעה אינו יכול לעלות על $K_{i+1} - K_i$, נובע כי:

$$P(K_{i+1}) - P(K_i) \leq (K_{i+1} - K_i) e^{-rt} \Rightarrow \frac{P(K_{i+1}) - P(K_i)}{(K_{i+1} - K_i)} e^{rt} \leq 1 \quad (9)$$

כאשר בגבול, המשוואה הופכת להיות:

$$\lim_{K_{i+1} \rightarrow K_i} \frac{P(K_{i+1}) - P(K_i)}{(K_{i+1} - K_i)} e^{rt} = \frac{\partial P(K)}{\partial K} e^{rt} = \int_0^K q(S_T) dS_T = P\{S_T \leq K\} \leq 1 \quad (10)$$

כאשר השוויון השני נובע ממשוואה 7. בambilים אחרות, אם היה ניתן לבנות תיק ארכיטראז' בעזרה אסטרטגיית מרווח עולה, פונקציית ההתפלגות המצטברת לא הייתה מוגדרת כלל וכלל כיוון שערכה אינה יכולה לעלות על אחד. המשמעות המעשית של כך היא כי הפרטים לא יתמחרו אופציות על פי ההתפלגות הניטרלית לסיכון אם יש אפשרות לארכיטראז'.

3. חילוץ ההתפלגות – סקירה ספרות

3.1 השימושות הקיימות בספרות

קיימות חמישה שיטות² עיקריות לחילוץ פונקציית הצפיפות הניטרלית לסיכון: שיטות תהליכיים סטוכסטיים, עציםBINOMIAL, שיטות פרמטריות לקירוב פונקציית הצפיפות, שיטות הפרשים סופיים (finite difference) ושיטות החלקה של סטיית התקן הגלומה. נייר זה יתמקד בשתי השיטות הפופולריות ביותר עלי ידי בנקים מרכזיים: קירוב פונקציית צפיפות על ידי פונקציה דו-לוגורטומית – שיטה פרמטרית, והחלקה של סטיות התקן הגלומות ממחררי אופציות – שיטה א-פרמטרית.

² להרחבה על השימושות השונות ראה Jackwerth (1999).

בשיטת הפרמטרית ניתן להניח כי התפלגות הינה דו-לוגנורמלית³, ועל ידי הגדרת בעיית מינימיזציה (בין המחיר התיאורטי של האופציה למחיר בפועל), מחלצים את הפרמטרים המאפיינים את התפלגות (שתי תוחלות, שתי סטיות תקן, והמשקל בין שני המצביעים). השיטה הא-פרמטרית לעומת זאת מיניחה דבר לגבי צורת התפלגות והיא גוזרת את המחיר לפי שעריר מימוש ועל ידי כך מחלצים את צורת התפלגות. לשתי השיטות יש בעיות אמפיריות הקשורות לעובדה כי על מנת לחלק את ההתפלגות, ישנו צורך בחחק רוחבי של אופציות הנסחרות בו-זמנית שכן אם לא, הן לא יש��פו את אותו המידע.

3.2 שיטות הסיכון הקיימות כתה בנק ישראל

שוק האופציות הנסחרות בבורסה אינו מאופיין בסחרות שמאפשרת דגימת מספר רב של עסקאות שהתבצעו סביר נקודת זמן מסוימת על מנת שנוכל לבנות את התפלגות. פיתרון אפשרי לחוסר הסינכרוניות הוא להשתמש בספר הפקודות בבורסה ולהניח כי המחיר "האמתית" בשוק מבוסס על מחירי היצע והbijoux הטובים ביותר. השימוש בספר הפקודות אומנם פותר את בעיית חוסר הסינכרוניות אך גם גישה זו סובלת מבעיות אמפיריות שכן ישנן אופציות ללא ציטוט במחיר סביר. בעיות אלו באות לידי ביטוי במרווח בין מחיר היצע ומחיר הביקוש המשקף ממד הפקודות למובהקותו של המחיר כמדד למחיר "האמתית" בשוק ועשויות לשקוף מחיר שוק שלא משקף את המחיר ההוגן.⁴ עקב לכך, לא ברור עד כמה ניתן לסמוך על הפרמטרים הנאמדים במודל. בנוסף, מחירים מוגבלים אלו יכולים לגרום לחוסר יציבות לאורך זמן בפרמטרים הנאמדים.

בנק ישראל קיימות שתי שיטות על מנת לסנן תוצאות חריגות הנובעות מהבעיות אשר הוזכרו בסעיף הקודם:

סינון לפי סטיות תקן גלומות – בסינון לפי סטיות תקן גלומות, הוחלט לסנן אופציות עם סטיות תקן גלומה הקטנה מ-2% וגדולה מ-20%. שיטה זו אינה מסנתה בצורה יעליה כאשר היא חסופה גם לטעויות מסווג ראשון, סינון אופציות קבועות לחולוטין כתוצאה מתקופות בהן סטיות התקן גבוהות במיוחד, וגם לטעויות מסווג שני כאשר כל אופציה עם סטיות תקן גלומה בטוחה הנ"ל אינה מסוננת למרות שהיא עדין עשויה להיות תצפית חריגה. עקב לכך, בהכט ופומפושקו (2005) הוחלט לעירוק שכלל על פי מחוזרים על מנת להתמודד עם הבעיות הנ"ל (המודל החדש נקרא RND במאמר).

משקלות לפי מחוזרים – שכלל בעזרת מחוזרי מסחר, מחושב כך שככל אופציה מקבלת משקל על פי סך המחיר שנסחר בה בפועל באותו יום עד לזמן הדגימה, ביחס לסך המחיר באותו יום, עד לזמן הדגימה, של כל האופציות. לפי שיטה זו, אופציות שנסחרו במחוזר משמעותית ביחס למחוזר היומי זוכות למשקל גדול יותר מאופציות שנסחרו במחוזרים קטנים. זאת מזור ההנחה שמחוזר מסחר הינו מאופיין ממשמעותי של יעילות השוק ולכן, האומדן למחיר אופציה בעלת מחוזר גדול יותר באופן יחסי, ישקוף באופן נאמן יותר את המחיר האמתי של האופציה, ויאפשר גזירת התפלגות שעריר חיליפין עתידיים מדויקת יותר

³ או אף מעבר לזו את גנון תלת לוג-נורמל – הנחה פחותה מגבילה אבל מוצמתה את דרגות החופש כנעה לדוגמה בהכט ופומפושקו (2005).

⁴ מחיר הוגן הינו מחיר אשר אינו מאפשר רוחני Arbitrage.

ויציבה יותר. אומנם השיטה אינה מוגדרת כסינון, אך אפקטיבית היא מסנתת אופציות מסוימות אשר בעלות מחזור אפסי יחסית לאופציות אחרות. החולשה של השיטה הנ"ל מתבטאת בכך כי גירתה ההתפלגות וسطיות התקן מבוססת על נתוני אופציות המתאים לנקודת זמן אחת משותפת, המשקפת את מצב השוק והציפיות השונות בשוק בדיק באותה נקודת זמן. לעומת זאת, מחזורי המסחר אשר משתמשים לקביעת המשקלות, מורכבים מנתון שמצטבר במהלך כל יום המסחר ולכן אינם משקפים את המצב בשוק בנקודת הזמן של דגימת הנתונים. הא-סימטריה בעדכניות הנתונים גורמת במקרים מסוימים להטיה במשקלות שמקבלות התוצאות. לדוגמה, אופציה שבתחילת يوم המסחר הייתה קרובה לכף, ולכן נסחרה במהלך גודל במהלך היום יכולה להתפרק מהקספּ⁵ כתוצאה ממשינוי בשער החליפין לפני זמן דגימת הנסיבות ובתווך כך יקטנו מחזורי המסחר משמעותית. בזמן דגימת הנתונים מהירות האופציות יאופיין, בغالל המסחר הדיל, בהימנות נמוכה ביחס למחיר האמיטי של האופציה, וביחס למידע על ציפיות המשקיעים הגלום במחיר האופציה אולם המשקל שהאופציה תקבל יהיה כאילו מחיר האופציה שנdagmo משקפים מהימנות גבוהה.

4. המתודולוגיה המוצעת לسانון ציפויות חריגות

הסינון המוצע מتبוסס, כאמור, על הגדרת מחיר הוגן הנקבע על פי כללי ארביטראז'⁶. בעולם בו נסחרות אופציות (רכש ומכר) במקביל למסחר בנכסי הבסיס, לא יוצרו רוחי ארביטראז' רק אם יתקיימו הכללים הבאים⁷:

- א) מחיר האופציה יהיה גדול יותר מערך הפנימי⁸ של האופציה.
- ב) מחירי האופציות הינם מונוטוניות עולה/ירדנות על פני שערו מימוש השונים.
- ג) הפרש המחיר בין כל שני זוגות אופציות מאותו סוג (רכש או מכיר) יהיה קטן מהפרש שעריו מימוש שלהם.
- ד) עלות אסטרטגיית פרפר תהיה חיובית.

ה) סטיית התקן הגלומה בין כל שני זוגות אופציות (מכיר ורכש) בעלות מחיר מימוש דומה צריכות להיות שווה (משוואת ה-Put-Call Parity), עד כדי סטייה של כ-2 אחוזים⁹.

התנאים לעיל מהווים אסטרטגיות אשר ניתן לבנות בשוק, כאשר הפרה באחד מן התנאים משמעותה כי הם מניבים רוחה ללא סיכון. תנאי א' הינו היחיד שבודק כל אופציה באופן נפרד מהאופציות האחרות ולמעשה מסנן את האופציות המתומחרות בחסר. שאר התנאים, המשלבים מספר אופציות בתהיליך הבדיקה (לדוגמה, בתנאי מספר ד' נבדקת 3 אופציות בשערו מימוש שונים), נועדו לסנן אופציות המתומחרות ביתר. לכן, ניתן לקבוע כי אם תנאים אלו מופרדים, זה יהיה כתוצאה מתהילך יתר ולא להיפך, והסינון יתבצע על האופציות המתומחרות ביתר (כלומר האופציה בעלת ערך הכספי הגבוה

⁵ אופציה בכף הינה אופציה אשר אם תאריך הפקיעה שלה היה היום, היא הייתה מניבה רוחה לקונה האופציה.

⁶ גישה דומה משמשת את הבנק המרכזי של אנגליה. ראו Notes on the Bank of England Option-Implied Probability Density Functions.

⁷ למעשה, ניתן למצוא עוד כללים. ראה לדוגמה (1973) Merton (2005). אך Carr and Madan (2005) מספקים את מספר התנאים **המינימאללי**.

⁸ ערך פנימי הינו הסכום שבעל האופציה היה מקבל ביום לו היה יכול למש את האופציה.

⁹ תיאורתי, כאמור להיות שווין אם מתעלמים מעומק השוק ועלויות עסקה.

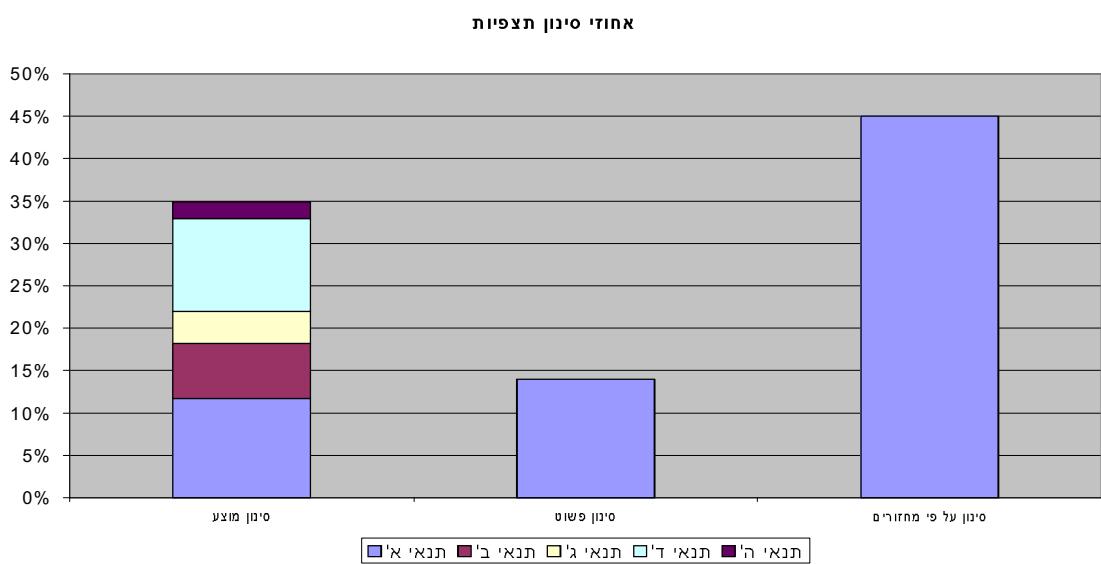
bijouterie אשר תרמה לרוחה באסטרטגיה). אצ'ין עוד כי תנאי ה' הינו חריג בכך שלא ניתן לקבוע איזו אופציה "אשמה" בארכיטראז' כיוון שהוא מערב שני אופציות מסווגים שונים. על כן, במקרה זה, שני האופציות יסוננו¹⁰.

היתרון העיקרי של סינון על פי כללי אריטבראז' טמון בעובדה כי הפרטים מתמחרים אופציות על פי ההסתברות הניטרלית לסיכון רק בתנאי שלא ניתן לבנות תיק אשר מאפשר אריטראז' (ראה חלק 2). לכן, ניתן וקיים בעיה תיאורית בסינונים אחרים (וכתוצאה לכך בפרמטרים אשר מתקבלים מהמודלים) אשר אינם מסננים אופציות אשר מאפשרות אריטראז'.

4.1 אחוז התצפויות המסוגנות

הטבלה הבאה מציגה את אחוזי הסיכון בשיטות השונות¹¹ כאשר בסיכון המוצע ישנה חלוקה לפי תנאים:

איור 2 – השוואת אחוז התצפויות אשר מסננים בשיטות השונות



ניתן לראות באירור 2 כי בסיכון המוצע, 35% מהתצפויות מסווגות¹² מול כ-14% בסיכון הפשט (מתחת %-2 מעלי %) ו-45% בשקלול על פי מחזוריים. ניתן כי הכמות היחסית קטנה של האופציות מסווגות בסיכון הפשט נובעת מטעויות מסווג שני – אי סיכון אופציות אשר משקפות מחירים לא הוגנים. בנוסף, הכמות הגדולה יחסית של אופציות אשר מסווגות בסיכון על פי מחזור נובעת מטעויות מסווג ראשון. הסיבה לכך היא כי רוב המחוור מתרכו סביב אופציות סביב הכספי ולכן באופן סיטמי, אופציות עמוק בתחום הכספי או רחוק מן הכספי מסווגות למרות כי ניתן והן משקפות מחירים הוגנים. הגרפּה הבא ממחיש נקודה זו ומציג את פונקציית הצפיפות המצטברת של האופציות אשר עוברות את הסיכון לפני שקלול על פי מחזור ולפי כללי אריטראז', כאשר האופציות מאופיינות על פי המרחק שלהם מן הכספי¹³ (Moneyness).

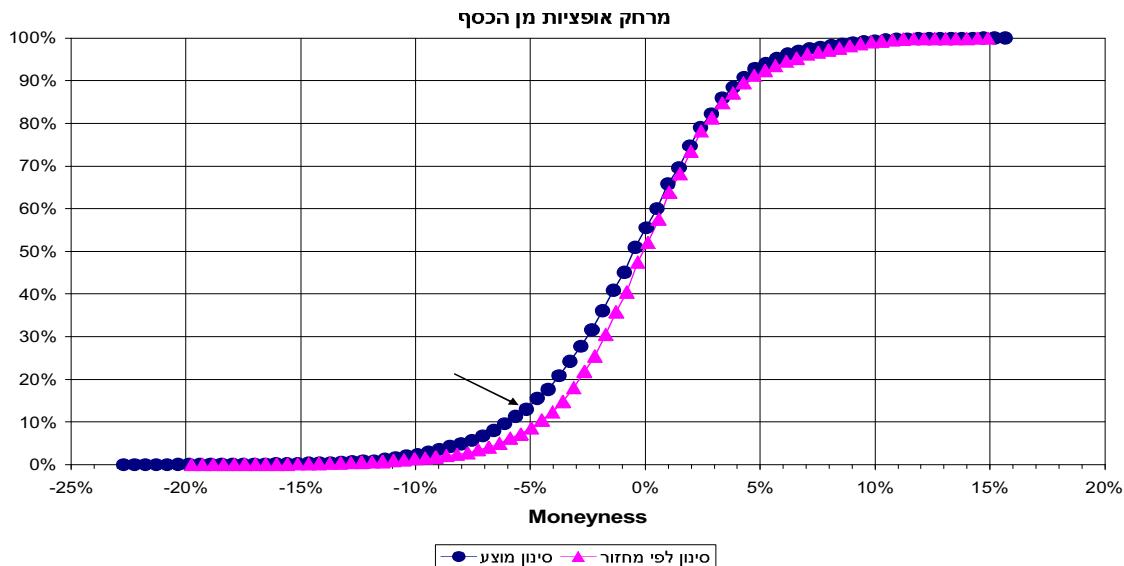
¹⁰ על פי הספרות המקצועית, ארבעת התנאים הראשונים אשר בחונים רוחי אריטראז' בשילוב של אופציות מאותו הסוג (מכרז או רכש) אינם מצלחים לבטל קיומם של רוחי אריטראז' באסטרטגיה זו ועל כן מומלץ להפעיל גם סיכון זה.

¹¹ אופציה קופטלה מסווגת על פי שקלול על פי מחזוריים אם הלקה היחסית במחזור הינו קטן מעשירות האחוז.

¹² נצ'ין כי במוצע נלקחות כ-31-32%.

¹³ החישוב היה הלוגריתם הטבעי של שער הפורוורד מחולק במדד המימוש.

איור 3 – פונקציית צפיפות מצתברת אמפירית



איור 3 עולה כי בסיכון לפי כללי ארכיטראז', אחוז גובה יותר של אופציות אשר רוחקוות יותר מן הכספי אינו מסונן מאשר בשקלול על פי מהזורה. לדוגמה, כאשר המרחק מן הכספי הינו -5% ומעלה, אחוז האופציות אשר אינם מסונן הינו גבוה יותר.

5. בדיקת והשוואת יציבות הפרמטרים בשיטות השונות

שוק האופציות הנסחרות בבורסה אינם מאופיין בסחרות גבוהה ולעיתים מחيري האופציות הנדגמים לצורך אמידת התפלגותם אינם משקפים מחيري שוק. על כן, כמו בכל מחקר אמפירי, ישנו צורך בניתוח תוצאות חריגות מהמודגם ועל ידי כך סטיטית התקן של המודל הנאמד קטנה, דבר אשר משפר את התוצאות המתתקבלות מהאמידה. על כן, ניפוי נכון של תוצאות חריגות-Amor לתרום ליציבות התוצאות ובכך מידת הרעש הלבן תקטן ומקדם המתאים העצמי יגדל בהתאם. (Bliss and Panigirzoglou (2002), ערכו השוואה בין שיטות שונות לאמידת התפלגות על ידי בהינתן רגישות השיטות לטעויות בדגימה בעזרת בחינת השונות של המומנטים הגבויים. לכן, במסגרת בחינת הסיכון המוצע בעבודה זו נבחן את הסדרה העתית של ההסתברות לפיחות וההסתברות לייסוף הון בשיטה הפרמטרית והן בשיטה הא-פרמטרית.¹⁴

להלן המודלים העומדים לבחון:

א. מודל פרמטרי (דו-לוג נורמל):

א.1. סיכון מוצע.

א.2. סיכון פשוט (מתחת ל- -2% מעל 20%).

ב. מודל פרמטרי – שיטת RND עם شكילל לפי מהזורים.

ג. מודל א-פרמטרי:

ג.1. סיכון מוצע.

ג.2. סיכון פשוט.

¹⁴ כיוון שלא ניתן להלין מהמודל הא-פרמטרי את המומנטים של התפלגות בחרתי לעורך את ההשוואה בין כל השיטות על הסתברויות לייסוף/פיחות בנכש הבסיס

5.1 בחינת השונות של הפרמטרים

בחלק זה נבחן סטטיסטי את ההבדלים בין השינויים היומיים בהסתברות לישוף חריג וההסתברות לפיחות חריג במודלים השונים, כאשר תקופת המדגם לצורך ההשוואה הינה שנת 2008¹⁵; תקופה אשר אופינה בתנודתיות גבוהה, הן בארץ והן בעולם, על רקע המשבר הפיננסי בעולם. על כן, החשיבות לגירית מידע אמין ומדובר על בסיס נתוני המסחר באופציות שקל/долר הינה גבוהה במיוחד. הנחתה המחקר העומדת מאחוריה ההשוואות היא כי שיטה עמידה יותר הינה פחות תנודתית. הסיבה לכך היא כפולה: (1) ניפוי התכיפות החריגות תורם לציבות המומנטים הנאמדים, כפי שהוזכר בסעיף הקודם. (2) הסדרה העתית של התנודתיות במחירים הינה בעל זיכרון ארוך (Long Memory). תכונה זאת קרויה בספרות האמפירית¹⁶ תנודתיות "בצורך" (Volatility Clustering). ככלומר, שינויים גדולים במהירות מלוויים בשינויים גדולים בתקופה הבאה. לכן, נצפה לראות כי הסדרה העתית תהיה הן יציבה יותר והן תראה דעיכה איטית יותר. מבחן סטטיסטי הבוחן את שונות האומדנים המתקבלים מהתפלגות על פני תקופת המדגם בשיטות השונות יקבע על השיטה העמידה ביותר אשר היא תניב מידע אינפורטטיבי (הקטנת עצמת הפללים הלבנים). להלן תוצאות המבחן¹⁷ לשיטות השונות שהוגדרו לעיל:

ЛОח 1 – בחינת יציבות הפרמטרים בשיטות השונות

ה.tbונדיות בשינוי בהסתברות לפיחות מעלה 3%	התנודתיות בשינוי בהסתברות לישוף מעלה 3%	
0.022	0.021	א.1. התפלגות פרמטרית – סינון מוצע
0.088 (p<0.01)	0.044 (p<0.01)	א.2. התפלגות פרמטרית – סינון פשוט
0.032 (p<0.01)	0.038 (p<0.01)	ב. התפלגות RND – סינון פשוט וסקולול התכיפות לפני מהזורה
0.023	0.027	ג.1. התפלגות א-פרמטרית – סינון מוצע
0.033 (p=0.37)	0.044 (p<0.01)	ג.2. התפלגות א-פרמטרית – סינון פשוט

אפשר לראות בלוח 1 לעיל כי סטיית התקן הנמוכה ביותר מתקבלת על פי שיטת הסינון המוצע הנו במודול הפרמטרי והן במודול הא-פרמטרי. אציין כי הבדלים אלו מובהקים מעט במקרה אחד; שונות השינויים

¹⁵ בתקופה זו ישנן 230 תכיפות.

¹⁶ ראה לדוגמה (1993) Ding, Granger and Engle (2001). לסירה ארוכה יותר ראה Cont (2001).

¹⁷ המבחן הסטטיסטי שעררכי הינו Modified Levene Test (Brown-Forsythe). השערת המחקר היא כי שונות ההסתברות לפיחות/ישוף של השיטה הפרמטרית בסינון המוצע נמוכה מן השונות בסינון פשוט ושיטת ה-RND. כמו כן, נשתה אותה בדיקה בוגרעד עבור השיטה הא-פרמטרית בסינון המוצע מול השיטה הא-פרמטרית בסינון פשוט. בדיקת השערות נערכה בזוגות מול השיטה המוצעת.

היוםים במודל הא-פרמטרי בשיטת הסינון פשוט אינה גבוהה מזו המיישמת את הסינון המוצע. על כן עמידותו של המודל המיישם את שיטת הסינון המוצע גדולה יותר והאינפורמציה המתקבלת נקייה יותר.

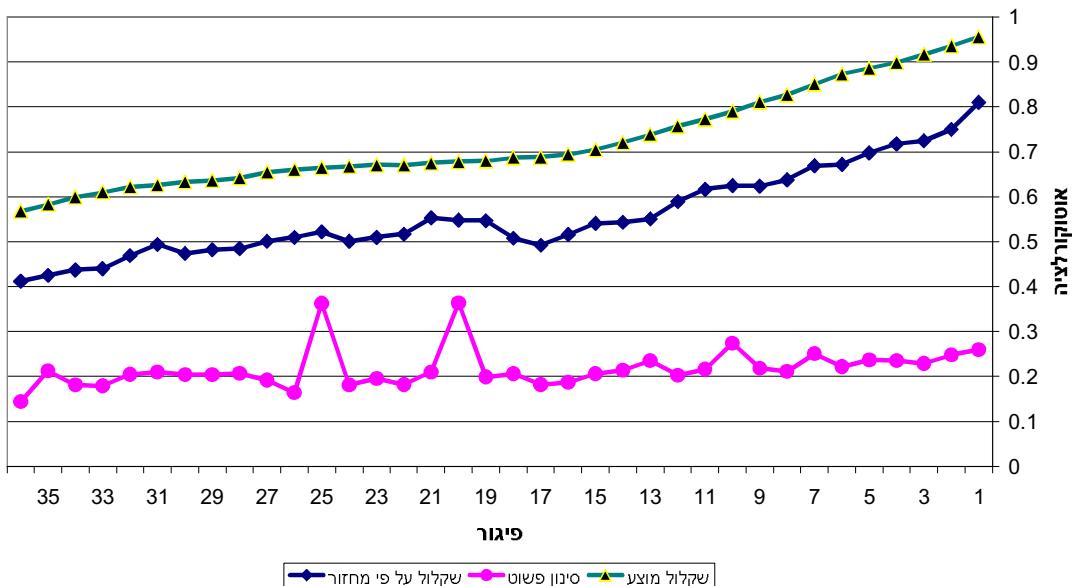
5.2 בחינת מידת ההחלקה של הנתונים

כasher בוחנים את ההתפתחות של הפרמטרים העיקריים של התפלגות על פני תקופה המדגם (איור 6 ואIOR 10 בעמוד 12 ו 13 בהתאם), ניתן לראות כי מגמות בתפתחות משתקפות ביותר בהירות במודלים המתחשבים בסינון המוצע; למשל, העלייה בסטיית התקן ובסיכוןים לפיחות וייסוף חריג שהחלה באמצע 2007.

על מנת לבדוק זאת אמפירית, אציג בחלק זה את גרפ' האוטוקורלציה (Correlogram). גרפ' זה מציג את ערך האוטוקורלציה בפיגורים שונים כאשר סדרה עתית עם מגמות ארוכות טווח תראה דעיכה איטית יותר וערכיהם חיוביים גבוהים יותר.

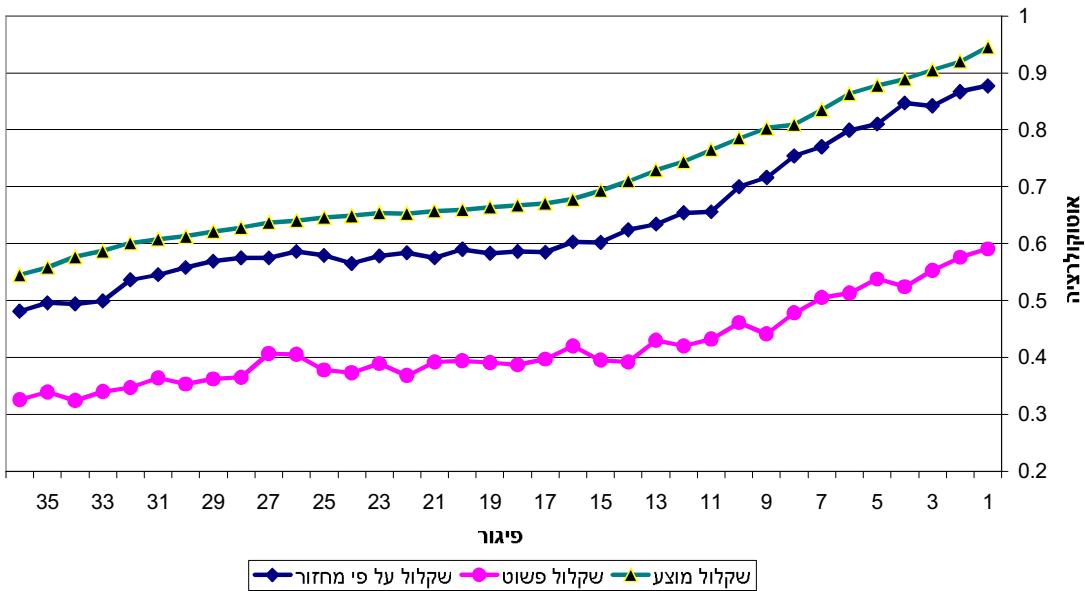
איור 4

אוטוקורלציה בהסתברות ליחס חריג מעל 3%



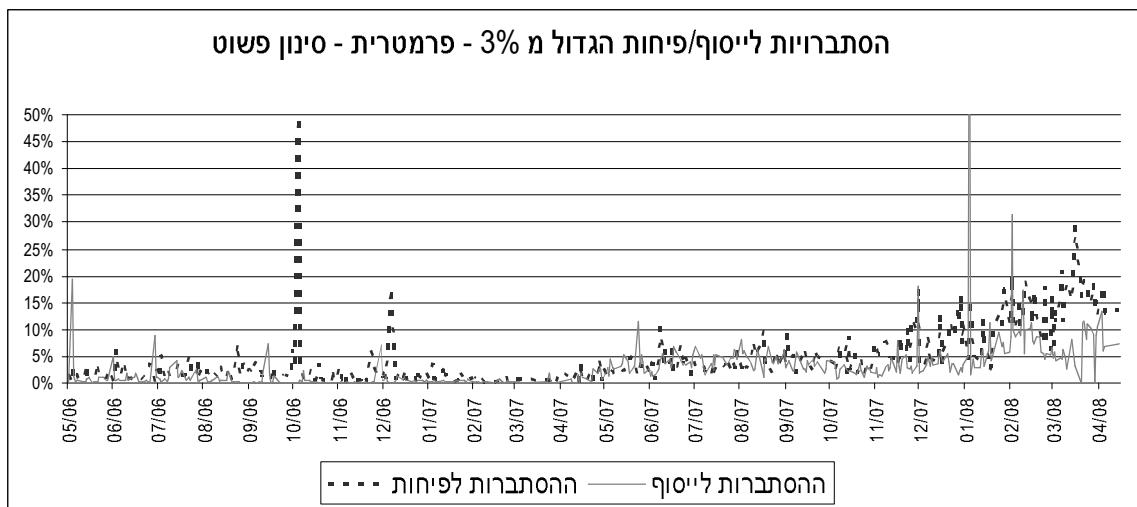
איור 5

אוטוקורלציה בהסתברות לפחות חריג מעל 3%

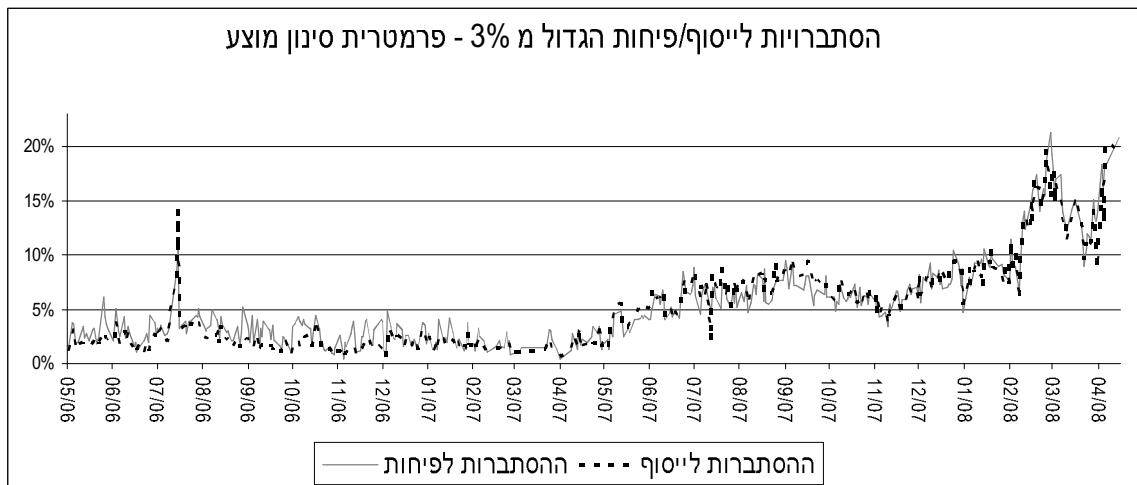


まいور 4 ו 5 לעיל, עולה כי הדעיכה האיטית ביותר ובუלת ערכי אוטוקורלציה גבוהים לכל פיגור הימם בסיכון המוצע. שני העמודים הבאים מציגים את הסדרות העתיות של ההסתברויות לפחות/יסוף חריג וסתירות התקן הגלומה בשיטות השונות בתקופת המדגם ונניתן מהם להתרשם כי ניתן להעריך את התפתחות האומדנים ביתר קלות וברמת ביטחון גבוהה יחסיתまいור 7 ו-10, המציגים את תוצאות המודלים (פרמטרי וא-פרמטרי) בשיטת הסיכון המוצעת בעבודה זו.

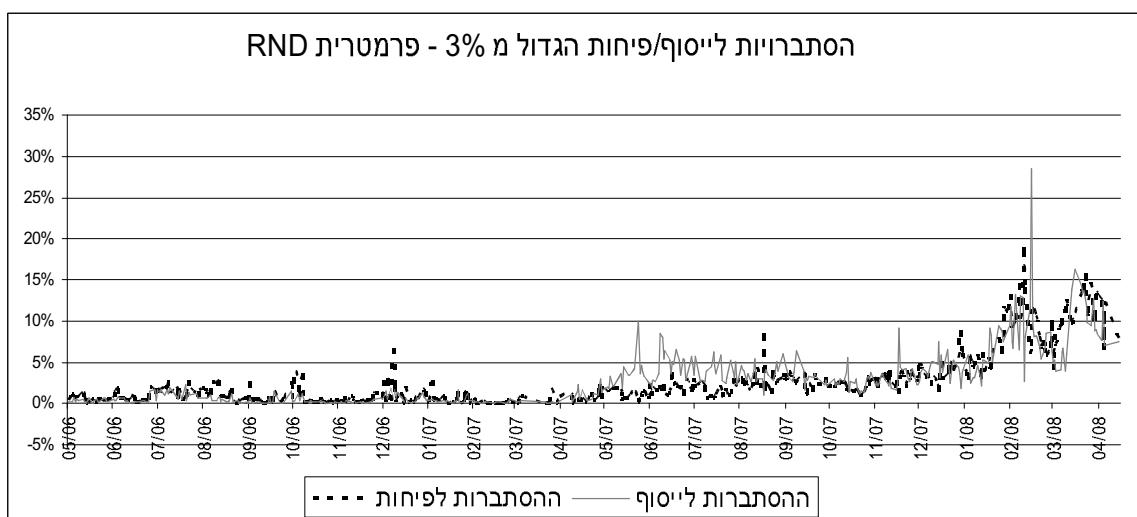
איור 6



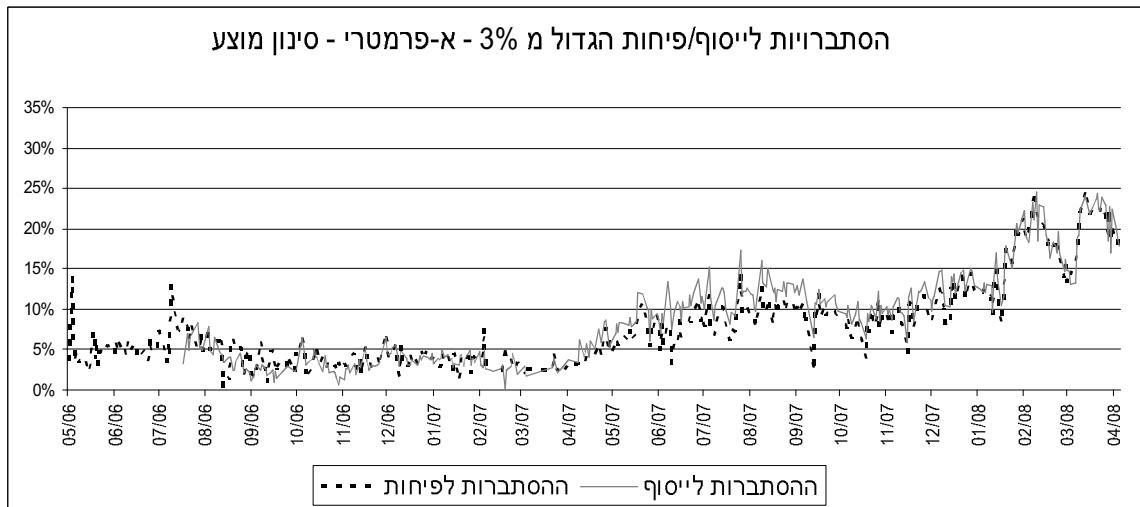
איור 7



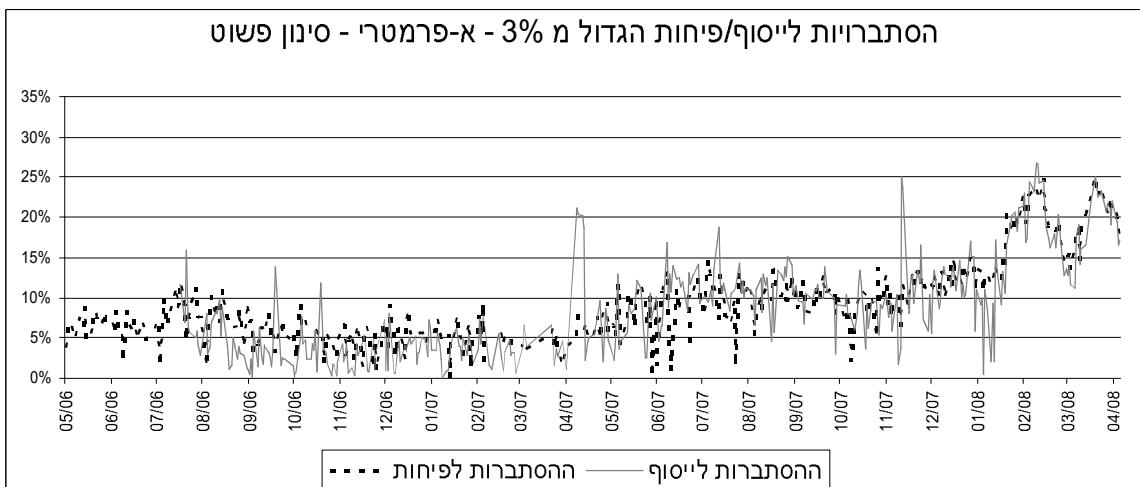
איור 8



איור 9



איור 10



5.3. בדיקה והשוואת התפלגות שלושה ימי מסחר נבחרים

בחלק זה נבחן בשלושה ימי מסחר עד כמה שונות צורות התפלגות המתקבלות על פי השיטות השונות ונראה גרפית כי שתי השיטות הנאמנות בעזרת הסינון המוצע בנייר זה מ釐ו מധיע מהימן יותר.

נבחרו שלושה תאריכים אשר ממחישים נקודה זו: 21.01.08, 12.08.07, 14.06.06 ו-12.08.07.

לוח 2 – פרמטרים הנאמדים בשיטות השוואת – 14.06.06

הסתברות לפיהות מעל 3 אחוזים	הסתברות לYES מעל 3 אחוזים	סטיית תקן	
3%	2%	5.9%	א.1. התפלגות פרמטרית – סינון מוצע
4.5%	4.5%	6.6%	א.2. התפלגות פרמטרית – סינון פשוט
3%	2%	6.5%	ב. התפלגות RND – סינון פשוט וסקולול התצפויות לפי מהזור
3%	3%	-	ג.1. התפלגות א-פרמטרית – סינון מוצע
8.4%	-	-	ג.2. התפלגות א-פרמטרית – סינון פשוט

לוח 3 – פרמטרים הבאים בשיטות השוואת – 12.08.07

הסתברות לפיהות מעל 3 אחוזים	הסתברות לYES מעל 3 אחוזים	סטיית תקן	
7%	8%	8.4%	א.1. התפלגות פרמטרית – סינון מוצע
7%	2%	10%	א.2. התפלגות פרמטרית – סינון פשוט
3%	3%	10%	ב. התפלגות RND – סינון פשוט וסקולול התצפויות לפי מהזור
10%	10%	-	ג.1. התפלגות א-פרמטרית – סינון מוצע
12%	10%	-	ג.2. התפלגות א-פרמטרית – סינון פשוט

לוח 4 - פרמטרים הנאמדים בשיטת השונת - 21.01.08

הסתברות לפיחות מעל 3 אחוזים	הסתברות ליחס מעל 3 אחוזים	סטטיסטיקן	
12%	13%	9%	א.1. התפלגות פרמטרית – סינון מוצע
2%	4%	10%	א.2. התפלגות פרמטרית – סינון פשוט
4%	8%	11%	ב. התפלגות RND – סינון פשוט וסקולול התוצאות לפי מהזור
14%	13%	-	ג.1. התפלגות א-פרמטרית – סינון מוצע
15%	13%	-	ג.2. התפלגות א-פרמטרית – סינון פשוט

אחד הדברים הבולטים מהנתונים הנ"ל הוא השוני הגדול בין השיטות השונות בהסתברויות שהולצנו. אפשר לראות כי יש הבדל גדול בין הערכים של השיטה הפרמטרית בסינון פשוט, שיטה RND והשיטה הא-פרמטרית בסינון פשוט. לעומת זאת, בסינון המוצע, אין הבדל כה גדול בין הערכים המתקבלים בשתי השיטות – פרמטרי וא-פרמטרי. עובדה זאת מחזקת את האמינות לסינון המוצע.

6. מסקנות

מטרת הניר הינה להציג מתודולוגיה אשר משתמשת על כללי ארביטראז' לсинון תוצאות חריגות הנובעות מטעויות בדגם מחייב אופיציות הנובעות משימוש בספר הפקודות, על מנת שיהיה ניתן לנזר פרמטרים אמינים יותר לתחזית התפלגות של שער השקלה/דולר כפי שгалומים מחייבי האופציות בבורסה. אפשר לראות כי ישות ההמלצות בניר זה מוסיפה לציבות הפרמטרים לאורך זמן, דבר המתבטא בתנודות נמוכה יותר של השינויים, דבר המאפשר לעקוב ביותר קלות אחר מגמות בסיכון המט"ח. בנוסף, היתרון בסינון המוצע על פני שיטות הסינון הקיימות בבנק ישראל הינו בכך שהסינון משתמש על יסודות תיאורתיים של תנאי רוחני ארביטראז' ואינו מוגדר עד הוק.

ביבליוגרפיה

- גלאי, דן ו.ב. שרייבר (2003). "האינפורמציה הגלומה באסטרטגיות ובאופציות שקל/долר הנסחרות בשוק מעבר לדלפק (OTC) בישראל", סדרת מאמרים לדין – סוגיות במתבע חוץ, בנק ישראל.
- הכט, י. ו.ה. פומפושקו, (2005), "RND", סדרת מאמרים לדין – עיונים מוניטריים, בנק ישראל.
- שטיין, ר. ו.י. הפט, (2004). "אמידת ההתפלגות הצפואה של שער החליפין שקל-долר הגלומה במחירים האופציוניים", רביעון לכלכלה .17
- שטיין, ר. (2005). "התפלגות הצפואה של שער החליפין שקל-долר", סוגיות בבנקאות Bahra, B. (1997). "Implied Risk-Neutral Probability Density Functions From Option Prices: Theory and Application", Bank of England Working Paper, No 66.
- Bliss, R. and N. Panigirtzoglou (2002). "Testing the Stability of Implied Probability Density Functions", *Journal of Banking and Finance* 26 (2-3), 381-422.
- Carr, P. and M. Dilip (2005). "A Note on Sufficient Conditions for No Arbitrage" *Finance Research Letters*, 2 (3), 125-130.
- Cont, R. (2001). "Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues", *Quantitative Finance* 1, 223-236.
- Coutant, S. (1999). "Implied Risk Aversion in Option Prices", Banque de France Working Paper.
- Harrison, J. M. and D. Kreps (1979). "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory* 20, 381-408.
- Harrison, J. M. and S. Pliska (1981). "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and Their Applications* 11, 215-260.
- Jackwerth, J. (1999). "Option Implied Risk-Neutral Distributions and Implied Binomial Trees: A Literature Review", *Journal of Derivatives*, 7 (2) 66-82.
- Manzano, C. and I. Sanchez (1998). "Indicators of Short-Term Interest Rate Expectations: The information Contained in the Options Market", Documento de Trabajo 9816, Servicio de Estudios, Banco de Espana.
- Merton, R. (1973). "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (1), 141–183.
- Nakamura, H. and S. Shiratsuka (1999). "Extracting Market Expectations from Option Prices", Working paper, Bank of Japan.